Απειροστικός Λογισμός III — No. 1 — Date 03/11/2019

Ακολουθίες:

$(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n :\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Ορισμός/Θεώρημα: Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ Η $(\bar{x}_\nu)$ είναι ακολουθία Cauchy (ή βασική ακολουθία), δηλ. (ορισμός) $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu,\mu\in\mathbb{N},\ \nu,\mu\ge\nu_0 : \|\bar{x}_\nu-\bar{x}_\mu\|<\varepsilon$.

Απόδειξη:

$(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$ συγκλίνει $\to$ $(\bar{x}_\nu)$ ακολ. Cauchy: (εύκολη κατεύθυνση, ίδια με αυτήν για $(a_\nu)\subset\mathbb{R}$)

Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\ \forall\nu\ge\nu_0: \|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\ \forall\nu,\mu\ge\nu_0: \underbrace{\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_\mu\|}_{=(\bar{x}_\nu-\bar{x}_0)+(\bar{x}_0-\bar{x}_\mu)} \le \|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|+\|\bar{x}_0-\bar{x}_\mu\| \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$(\bar{x}_\nu)$ ακολουθ. Cauchy $\Rightarrow (\bar{x}_\nu)$ συγκλίνει, δηλ. $\exists \bar{x}_0\in\mathbb{R}^n : \bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$

Έστω $\bar{x}_\nu = (\underbrace{x_\nu^{(1)}}_{\in\mathbb{R}},\dots,\underbrace{x_\nu^{(n)}}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^n$. Αφού η $(\bar{x}_\nu)$ ακολ. Cauchy:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\ \forall\nu,\mu\ge\nu_0\quad |x_\nu^{(i)}-x_\mu^{(i)}|\le\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_\mu\|_\infty\le\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_\mu\|<\varepsilon,\ \forall i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n\ (x_\nu^{(i)})\subset\mathbb{R}$ ακολ. Cauchy

$\xrightarrow{\mathbb{R}\ \text{πλήρης}} \forall i=1,\dots,n\ \exists x_0^{(i)}\in\mathbb{R}: x_\nu^{(i)}\to x_0^{(i)}$ (στο $\mathbb{R}$).

Θέτουμε: $\bar{x}_0=(x_0^{(1)},\dots,x_0^{(n)})\in\mathbb{R}^n$ και άρα (Πρόταση 1.44) $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x}_0$

$\overset{\text{Πρότ. 1.44}}{\Longleftrightarrow} x_\nu^{(i)}\to x_0^{(i)}$ (στο $\mathbb{R}$) $\forall i=1,\dots,n$.

Θεώρημα Bolzano - Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια [τουλάχιστον μια] συγκλίνουσα υπακολουθία. [Αν $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ είναι ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ και $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ \nu\mapsto k_\nu\in\mathbb{N}$ με $k_\nu<k_{\nu+1}\ \forall\nu\in\mathbb{N}$, τότε $(\bar{x}_{k_\nu})\subset(\bar{x}_\nu)$ είναι υπακολουθία της $(\bar{x}_\nu)$].

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε ως γνωστό το Θ.BW στον $\mathbb{R}$.

Ιδέα:

$$\begin{array}{cccccc}
i = & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
\nu = 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \cdots & x_1^{(n)} \\
2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots & x_2^{(n)} \\
3 & x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & \cdots & x_3^{(n)} \\
4 & x_4^{(1)} & x_4^{(2)} & x_4^{(3)} & \cdots & x_4^{(n)} \\
5 & x_5^{(1)} & x_5^{(2)} & x_5^{(3)} & \cdots & x_5^{(n)}
\end{array}$$

① Θεωρώ μόνο την ακολουθία $(x_\nu^{(1)}) \subset \mathbb{R}$. Είναι φραγμένη
$|x_\nu^{(1)}| \leq \|\bar{x}_\nu\| \leq C \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\underset{BW \text{ στον } \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \exists \underbrace{(x_{k_\nu}^{(1)})}_{\text{συγκλίνει}} \subset (x_\nu^{(1)})$

② Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $(x_{k_\nu}^{(2)}) \subset (x_\nu^{(2)}) \subset \mathbb{R}$. Αφού η $(x_\nu^{(2)})$ είναι φραγμένη, και η $(x_{k_\nu}^{(2)})$ είναι φραγμένη $\underset{BW \text{ στον } \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \exists (x_{k_{\ell_\nu}}^{(2)}) \subset (x_{k_\nu}^{(2)})$
με $x_{k_{\ell_\nu}}^{(2)} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} x_0^{(2)} \in \mathbb{R}$. Όμως, επειδή $(x_{k_{\ell_\nu}}^{(1)}) \subset (x_{k_\nu}^{(1)})$ συγκλίνει στο $x_0^{(1)}$

και η $x_{k_{\ell_\nu}}^{(1)} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} (x_0^{(1)}) \in \mathbb{R}$. Άρα μέχρι τώρα βρήκαμε μια υπακολουθία δεικτών $(k_{\ell_\nu}) \subset (k_\nu) \subset (\nu)$, έτσι ώστε $x_{k_{\ell_\nu}}^{(1)} \to x_0^{(1)}$ και $x_{k_{\ell_\nu}}^{(2)} \to x_0^{(2)}$.

③ Συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε τελικά μια υπακολουθία δεικτών $(m_\nu) \subset (\nu)$ με $x_{m_\nu}^{(i)} \to x_0^{(i)}$, $\forall i = 1, \ldots, n$ ⇔ $\bar{x}_{m_\nu} \to \bar{x}_0$ στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση: Τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών μιας ακολουθίας $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζονται σημεία συσσώρευσης της $(\bar{x}_\nu)$.
Οι ακολουθίες είναι πάντα (μα πάντα!) πολύ χρήσιμες για να καταλάβαμε διάφορες τοπολογικές έννοιες (σε μερικούς χώρους). Ας δούμε κάποιες ιδιότητες τέτοιες:

Πρόταση 1.4.5: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε: $\underbrace{\bar{x} \text{ σημείο συσσώρευσης του } U \; [\Leftrightarrow \bar{x} \in U']}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}$

Απόδειξη: Έστω $\bar{x}$ σημ. συσσ. του U, όπως στον ορισμό. Θ.ν.δ.ο.:
$\exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}$.

Έχουμε (από τον ορισμό): $\forall \nu \in \mathbb{N} : \underbrace{B(\bar{x}, \tfrac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}\} \cap U}_{\bar{y} \in \text{ -||- } \Leftrightarrow 0 < \|\bar{y} - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu}} \neq \emptyset \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\exists \bar{x}_\nu \in U : \underbrace{0 < \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\|}_{\Leftrightarrow \bar{x}_\nu \neq \bar{x}} < \frac{1}{\nu}$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \exists \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\} : 0 \leq \|\bar{x} - \bar{x}_\nu\| < \frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \Rightarrow \underbrace{\|\bar{x} - \bar{x}_\nu\| \to 0}_{\text{Θ. Παρεμβ.}}$

$\underset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} \bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}$.

$\Leftarrow$ Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \|\bar{x}_{\nu_0} - \bar{x}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{x}_{\nu_0} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$

$\exists \bar{x}_{\nu_0} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Άσκηση: Πρόταση 1.4.6: $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε: $\bar{x} \in \bar{U} \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

Πρόταση 1.4.7 (Super-Εργαλείο): $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\underbrace{\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n}_{\text{(υπόθεση!)}}$ ισχύει $\bar{x} \in U$

Scanned with CamScanner